

23 septembre 2025

## Corrigé 2

**Exercice 1.** Lesquels des sous-ensembles suivants de  $\mathbb{R}$  (muni de l'addition et de la multiplication usuelle) sont des anneaux unitaires?

- (a) l'ensemble des entiers divisibles par 3, c'est-à-dire l'ensemble  $\mathcal{A} = \{3k \mid k \in \mathbb{Z}\}$ .  
 (b)  $\{\frac{a}{b} \mid a, b \in \mathbb{Z}, ab \neq 0, \text{pgcd}(a, b) = 1, b \text{ impair}\} \cup \{0\}$ .

**Solution 1.**

- (a) Bien que la plupart des axiomes sont satisfaits (par exemple, l'ensemble est stable par l'addition et la multiplication et les axiomes sur les opérations, l'associativité, la commutativité de l'addition, la distributivité, etc, sont satisfaits), ce n'est pas un anneau unitaire car il ne contient aucun élément neutre pour la multiplication.  
 (b) L'ensemble est stable par l'addition et la multiplication usuelle des nombres rationnels. L'élément neutre pour l'addition et pour la multiplication appartient à l'ensemble, ainsi que les inverses additifs. Les règles de distributivité, l'associativité, etc sont héritées de  $\mathbb{R}$ . Cet ensemble est un anneau unitaire.

**Exercice 2.** Répondre à chacune des questions suivantes.

- (a) Est-ce que l'équation  $x^2 - 2 = 0$  a des solutions dans le corps  $\mathbb{F}_{11}$  ?  
 (b) Est-ce que l'équation  $x^2 = -4$  a des solutions dans le corps  $\mathbb{F}_{13}$  ?

**Solution 2.**

- a) Non. En fait, les carrés dans  $\mathbb{F}_{11}$  sont  $\bar{0}, \bar{1}, \bar{4}, \bar{9}, \bar{5}, \bar{3}$ , alors que  $\bar{2}, \bar{6}, \bar{7}, \bar{8}, \bar{10}$  ne sont pas des carrés.  
 b) Oui, comme  $\overline{-4} = \bar{9} = \bar{3}^2$ .

**Exercice 3.** Résoudre les équations  $x^2 + 2x + 2 = 0$  et  $x^2 + 2x + 3 = 0$  dans le corps  $\mathbb{F}_5$ .

**Solution 3.** Pour simplifier l'écriture, on supprime la barre sur les entiers pour les éléments de  $\mathbb{F}_5$ , On a

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 1 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -1 = 4 \in \mathbb{F}_5 \Leftrightarrow x + 1 = 2 \text{ ou } 3 \Leftrightarrow x = 1 \text{ ou } 2.$$

Par ailleurs

$$x^2 + 2x + 3 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 + 2 = 0 \Leftrightarrow (x + 1)^2 = -2 = 3 \in \mathbb{F}_5.$$

Mais, on vérifie qu'il n'existe pas d'élément de  $\mathbb{F}_5$  dont le carré vaut 3. Donc l'équation  $x^2 + 2x + 3 = 0$  n'a pas de solution dans  $\mathbb{F}_5$ .

**Exercice 4.** On considère l'anneau  $A = \mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$  des entiers modulo 12. Trouver tous les éléments inversibles dans  $A$ . (Rappel: dans un anneau, les éléments inversibles sont ceux qui possèdent un inverse par rapport à la multiplication.)

**Solution 4.** De nouveau, on supprime la notation avec barres. Noter que si  $a \in A$  est inversible alors  $a$  ne peut être un *diviseur de zéro*, c'est-à-dire, s'il existe  $b \in B$  tel que  $ab = 0$  alors comme  $a$  est inversible on déduit que  $b = 0$ .

On en déduit que les éléments suivants ne sont pas inversibles:  $\{2, 3, 4, 6, 8, 9, 10\}$  car  $2 \cdot 6 = 0$ ,  $3 \cdot 4 = 0$ ,  $3 \cdot 8 = 0$ ,  $4 \cdot 9 = 0$ , et  $6 \cdot 10 = 0$ .

Les autres éléments sont inversibles: en effet,  $1 \cdot 1 = 1$ ,  $5 \cdot 5 = 1$ ,  $7 \cdot 7 = 1$  et  $11 \cdot 11 = 1$ .

---

**Exercice 5.** Posons  $E = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in \mathbb{Q}\}$ , un sous-ensemble de  $\mathbb{R}$ .

(a) Vérifier que  $E$  est stable par l'addition usuelle des nombres réels et que  $E \setminus \{0\}$  est stable par la multiplication usuelle.

(b) Montrer que chaque élément de  $E$  possède un inverse additif dans  $E$  et que chaque élément non nul de  $E$  possède un inverse multiplicatif dans  $E$ .

(Ce sont deux des vérifications nécessaires pour voir que  $E$  est un corps.)

**Solution 5.**

(a) Soient  $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ . Alors  $(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) = (a + c) + (b + d)\sqrt{3}$  et  $a + c, b + d \in \mathbb{Q}$ , donc  $(a + b\sqrt{3}) + (c + d\sqrt{3}) \in E$ . Aussi  $(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) = (ac + 3bd) + (ad + bc)\sqrt{3}$  et de nouveau on a que  $ac + 3bd, ad + bc \in \mathbb{Q}$  et donc  $(a + b\sqrt{3})(c + d\sqrt{3}) \in E$ .

(b) L'inverse additif de  $a + b\sqrt{3}$  est  $-a - b\sqrt{3}$  qui appartient à  $E$ . On note que  $(a + b\sqrt{3})(a - b\sqrt{3}) = a^2 - 3b^2 \in \mathbb{Q}$ . De plus, comme  $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ ,  $a^2 - 3b^2 \neq 0$ . Donc  $(a + b\sqrt{3})(\frac{a}{a^2 - 3b^2} - \frac{b}{a^2 - 3b^2}\sqrt{3}) = 1$  et on voit que l'inverse multiplicatif de  $a + b\sqrt{3}$  appartient à  $E$ .

---

**Exercice 6.** Soit  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \{f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$ , l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ . En cours nous avons remarqué que  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  est un anneau unitaire, avec l'addition et la multiplication d'applications usuelles. On définit  $G : \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ , par  $G(f) = f(0)$ , pour tout  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ . (Par exemple pour  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  avec  $f(x) = x^3 - \sin x$ , on trouve  $G(f) = 0^3 - \sin(0) = 0$ .)

Montrer que  $G$  est un morphisme d'anneaux.

**Solution 6.** On doit montrer que pour tout  $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on a

- $G(f + g) = G(f) + G(g)$ ,
- $G(fg) = G(f)G(g)$ , et
- $G(1) = 1$ .

$G(f + g) = (f + g)(0) = f(0) + g(0) = G(f) + G(g)$  et aussi  $G(fg) = (fg)(0) = f(0)g(0) = G(f)G(g)$  et enfin pour la fonction identité,  $f(x) = 1$  pour tout nombre réel  $x$ , qui est l'élément neutre pour la multiplication dans l'anneau  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ , on a que  $G(f) = 1$ , ce qui est l'élément neutre pour la multiplication dans  $\mathbb{R}$ .

---

**Exercice 7.** Soit  $\mathbb{F}_2$  le corps à deux éléments. On munit l'ensemble  $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$  des lois de composition  $+$  et  $\cdot$  définies par

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d), \quad (a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd).$$

Montrer que  $(\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2, +, \cdot)$  est un corps à quatre éléments.

**Solution 7.** Comme la loi de composition  $+$  se fait par composantes, il est facile de vérifier l'associativité, la commutativité, l'existence de l'élément neutre et l'existence de l'élément opposé de tout élément.

La loi de composition  $\cdot$  est commutative, car pour  $a, b, c, d \in \mathbb{F}_2$ ,

$$(a, b) \cdot (c, d) = (ac + bd, ad + bc + bd) = (ca + db, da + cb + db) = (c, d) \cdot (a, b).$$

L'élément  $(1, 0)$  est l'élément neutre pour la loi de composition  $\cdot$ , car pour  $a, b \in \mathbb{F}_2$ ,

$$(a, b) \cdot (1, 0) = (1, 0) \cdot (a, b) = (a, b).$$

La loi de composition  $\cdot$  est associative, car

$$\begin{aligned} & ((a, b) \cdot (c, d)) \cdot (e, f) \\ &= (ac + bd, ad + bc + bd) \cdot (e, f) \\ &= (ace + bde + adf + bcf + bdf, acf + bdf + ade + bce + bde + adf + bcf + bdf) \\ &= (a, b) \cdot (ce + df, cf + de + df) \\ &= (a, b) \cdot ((c, d) \cdot (e, f)) \end{aligned}$$

pour  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_2$ .

Pour la loi de composition  $\cdot$ , l'inverse de  $(1, 0)$ , qui est l'élément neutre, est  $(1, 0)$ , celui de  $(0, 1)$  est  $(1, 1)$ , et celui de  $(1, 1)$  est donc  $(0, 1)$ .

La loi de composition  $\cdot$  est distributive pour la loi de composition  $+$ , car pour  $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{F}_2$ , on a

$$\begin{aligned} (a, b) \cdot ((c, d) + (e, f)) &= (a, b) \cdot (c + e, d + f) \\ &= (ac + ae + bd + bf, ad + af + bc + be + bd + bf) \\ &= (ac + bd, ad + bc + bd) + (ae + bf, af + be + bf) \\ &= (a, b) \cdot (c, d) + (a, b) \cdot (e, f). \end{aligned}$$

On démontre de manière analogue l'autre condition pour la distributivité

$$((c, d) + (e, f)) \cdot (a, b) = (c, d) \cdot (a, b) + (e, f) \cdot (a, b).$$

Cette condition peut aussi se déduire de la précédente en utilisant la commutativité de la loi de composition  $\cdot$ .